Ερώτημα

Πότε $v+Y=Y \Leftrightarrow v\in Y$ 17/12/19

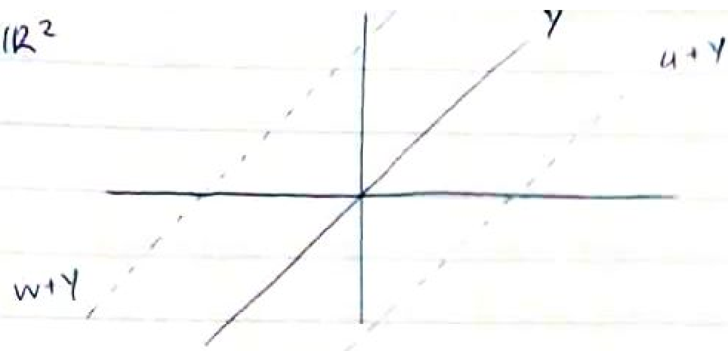
Σύμπλοκα

<u>Ορισμός</u>

Έστω V δ.χ και $Y\leq V$ Αν $u\in V$ τότε το σύνολο $u+Y=\{u+v \mid v\in Y\}$ καλείται σύμπλοκο ως προς Y

Πότε το σύμπλοκο ~~κα~~ είναι υπόχωρος;

π.χ $\mathbb{R}^2$



Ορισμός

Έστω V δ.χ και $Y \subseteq V$. Το σύνολο των συμπλόκων ως προς Y καλείται $\boxed{\text{χώρος}}$ πηλίκων συμβολίζεται με V/Y και περιέχει
$\{u+Y \mid u\in V\} = V/Y$

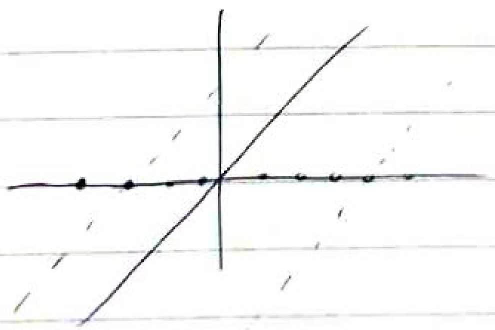
Πρόταση

Ο χώρος πηλίκων αποτελεί δ.χ με τις πράξεις του V δηλαδή
$(u+Y)+(w+Y)=(u+w)+Y$
$\alpha\in\mathbb{R}$ ορίζεται το γινόμενο $\alpha(u+Y)=\alpha u+Y$

Πρόταση

Έστω V δ.χ και $Y \subseteq V$. Τότε $\dim(V/Y)=\dim V-\dim Y$

π.χ $\mathbb{R}^2/Y = \{$όλες τις // ευθείες στην $Y\}$



$\alpha(u+Y)=\alpha u+Y$
$\alpha\{u+v \mid v\in Y\}$ $\{\alpha u+\underbrace{\alpha v}_{v'} \mid \underset{v'\in Y}{v\in Y}\} = \{\alpha u+v' \mid v'\in Y\} = \alpha u+Y$

Απόδειξη

Y βασικό σύμπλοκο = το μηδενικό διάνυσμα στο χώρο V/Y
$u+Y\neq Y \quad u\notin Y$
$(u+Y)+(Y)=(u+Y)+(\bar{0}+Y)=(u+\bar{0})+Y=u+Y$

→

Πρόταση

Έστω V δ.χ και $Y \leq V$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1) $u+Y=w+Y$ ⇔ ότι τα δυο σύνολα είναι ίσα

2) $u \in w+Y$

3) $u-w \in Y$

Απόδειξη

1) ⇒ 2) $u+Y=w+Y$ θέλουμε το u

$u+Y=\{u+v \mid v \in Y\}$

$w+Y=\{w+v' \mid v' \in Y\}$

$u+Y=w+Y$

$u=u+\bar{0} \in u+Y=w+Y$ $\quad u \in w+Y$

2) ⇒ 3) $u \in w+Y \Rightarrow u=w+v' \quad v' \in Y$

$u-w=v' \in Y$

3) ⇒ 1) $u-w \in Y \Rightarrow \exists v' \in Y$ ώστε $u-w=v' \Rightarrow u=w+v' \Rightarrow$

$u+Y=w+v'+Y=w+Y$

$v' \in Y$ $\qquad v'+Y=V$

$\{\underbrace{v'+v''}_{\in Y} \mid v'' \in Y\} = \{v''' \mid v''' \in Y\} = Y$

$v'+v''=v''' \in Y$

Ερώτημα: Τι σχέση έχουν τα σύνολα μεταξύ τους;

$u+Y \quad w+Y$

α) $u+Y=w+Y$

β) $u+Y \neq w+Y$ → $u+Y \cap w+Y = \emptyset$

→ $u+Y \cap w+Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in u+Y \cap w+Y$

⇒ 2 από προηγούμενο $\left.\begin{array}{l} x+Y=u+Y \\ x+Y=w+Y \end{array}\right\} \Rightarrow u+Y=w+Y$

π.χ.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$\varphi : V \to V/Y$ με τύπο

$\varphi(u) = u + Y$

φ γραμμική : $\Phi(u+u') = u+u'+Y = u+Y+u'+Y = \Phi(u)+\Phi(u')$

$\Phi(au) = au + Y = a(u+Y) = \varphi(u) + \phi(u') = a\,\phi(u)$

Η φ είναι ομομορφισμός

Η φ είναι επιμορφισμός, επί $\forall$ στοιχείο $\overset{u+Y}{}$ του V/Y υπάρχει στοιχείο w του V ώστε η εικόνα του $\phi(w)$ να δίνει το αρχικό

$\varphi(w) = a + Y$

$\underbrace{u+Y}_{\substack{\text{τυχαίο} \\ V/Y}} = \varphi(\underset{\in V}{u})$

$\ker\phi = \{ u \in V \text{ ώστε } \phi(u) = Y \}$

αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα του V/Y

$u + Y = Y \Leftrightarrow u \in Y \Leftrightarrow \ker\phi = Y$

$\operatorname{Im}\phi \underset{\text{επί}}{=} V/Y \qquad \phi : V \to V/Y$

$\dim V = \dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\varphi$

$\dim V = \dim Y + \dim V/Y$

π.χ $V = \mathbb{R}^2$ $\quad Y = \langle (1,1) \rangle$ ευθεία διαγώνιος

$V/Y = \mathbb{R}^2/\langle(1,1)\rangle$ χώρος πηλίκο

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\langle(1,1)\rangle$ → έχει διάσταση 1 είναι μια ευθεία.

$\varphi(a,b) = (a,b) + \langle(1,1)\rangle$

$= \{ (a,b) + t(1,1) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (a+t, b+t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Πινακάκια

Στοιχειώδεις πίνακες

1) $E_{i,j}$ πίνακας αλλαγής γραμμών

$E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}$ $\quad$ $E_{i,j}^{t} = E_{i,j}$ (στοιχειώδης πίνακας)

2) $M_i(a)$, $a \neq 0$ $\quad$ $M_i^{-1}(a) = M_i\left(\frac{1}{a}\right)$ $\quad$ $M_i^{t}(a) = M_i(a)$ $\quad$ στοιχειώδεις πίνακες

3) $A_{i,j}(a)$ $\quad$ $A_{i,j}^{-1}(a) = A_{i,j}(-a)$ $\quad$ $A_{i,j}^{t}(a) = A_{j,i}(a)$ $\quad$ στοιχειώδεις πίνακες

$A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

rank A = πλήθος γραμ. ανεξάρτητων γραμμών του A = πλήθος των ηγετικών μονάδων του ανηγμένου κλιμακωτού.

$P \cdot A \cdot Q$ = ανηγμένο κλιμακωτό $\cdot Q$ * (κάτω απ' τη τελευταία ηγετική μονάδα έχω μηδενικά δεξιά μπορεί και έχω αριθμούς)

P: στοιχειώδεις πράξεις γραμμών $\quad$ Q: στοιχειώδεις πράξεις στηλών

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{με στηλοπράξεις}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$* = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ rank $A = r$

rank A = πλήθος γραμ. ανεξ. γραμμών του

= πλήθος γραμ. ανεξ. στηλών του.

Οι στήλες του A είναι οι γραμμές του A^t

rank A^t = πλήθος των γρ. ανεξ. στηλών του A.

$$\underset{\substack{\text{αντιστρέψιμος}\\ \text{στοιχειώδεις πίνακες}}}{P} \cdot A \cdot \underset{\substack{\text{αντιστρ. στοιχειώδεις}\\ \text{πίνακες}}}{Q} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

πλήθος γρ. ανεξ. γραμμών
= πλήθος " στηλών
= r

$$(P \cdot A Q)^t = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t \underset{\text{συμμετρ.}}{=} \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$Q^t A^t P^t = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

στοιχειώδεις πίνακες

<u>Πρόταση</u>

Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα A ισούται με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A ισούται με το rank A.

Παρασκευή 10/12 αναπλήρωση αντί για 7/12